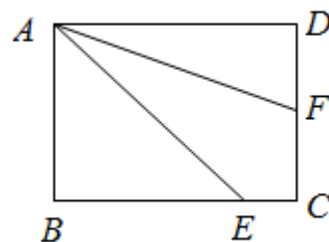


第2讲角平分线模型(加油站)

一、垂两边

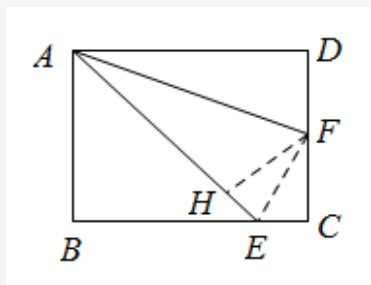
练习1

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， F 是 CD 的中点， E 是 BC 边上的一点，且 AF 平分 $\angle DAE$ ，若 $EC = 3$ ， $AD = 11$ ， $AE =$ _____.



【答案】 14

【解析】 联结 EF ，作 $FH \perp AE$



$\because AF$ 平分 $\angle DAE$ ， $\angle D = 90^\circ$ ， $FH \perp AE$ ，

$\therefore FH = FD$ ，

又 $\because DF = FC = FH$ ， FE 为公共边， $\angle FHE = \angle C = 90^\circ$ ．

$\therefore \triangle FHE \cong \triangle FCE$ (HL)．

$\therefore HE = CE$ ．

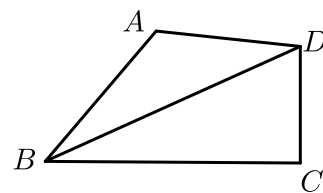
$\therefore AE = AH + HE$ ， $AH = AD$ ， $HE = CE$ ，

$\therefore AE = EC + AD = 14$ ．

【标注】 【知识点】 全等三角形的对应边与角

2.

如图，已知在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = 90^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ， $AB = 6$ ， $BC = 9$ ，四边形 $ABCD$ 的面积为30，则 CD 等于（ ）。



A. $\frac{15}{4}$

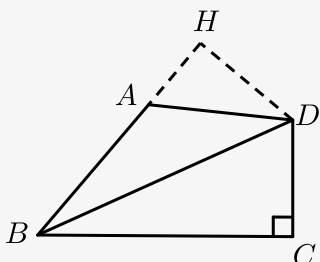
B. 4

C. $\frac{9}{2}$

D. 5

【答案】B

【解析】过 D 作 $DH \perp AB$ 交 BA 的延长线于 H ，



$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore DH = CD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$

$$30 = \frac{1}{2} AB \cdot DH + \frac{1}{2} BC \cdot CD$$

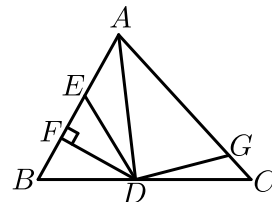
$$30 = \frac{1}{2} (6 + 9) CD,$$

解得： $CD = 4$ 。

故选B。

【标注】【知识点】角分线性质定理

3. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DF \perp AB$ ，垂足为 F ， $DE = DG$ ， $\triangle ADG$ 和 $\triangle AED$ 的面积分别为51和38，则 $\triangle EDF$ 的面积为（ ）。



A. 6.5

B. 5.5

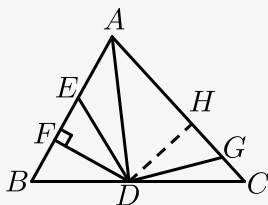
C. 8

D. 13

【答案】A

【解析】设 $\triangle EDF$ 的面积为 x ，

作 $DH \perp AC$ 于 H ，



$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DF \perp AB$ ， $DH \perp AC$ ，

$\therefore DF = DH$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DFE$ 和 $\text{Rt}\triangle DHG$ 中，

$$\begin{cases} DF = DH \\ DE = DG \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle DFE \cong \text{Rt}\triangle DHG (\text{HL})$ ，

$\therefore S_{\triangle DFE} = S_{\triangle DHG}$ 。

由题意得， $38 + x = 51 - x$ ，

解得， $x = 6.5$ ，

$\therefore \triangle EDF$ 的面积为6.5，

故选：A。

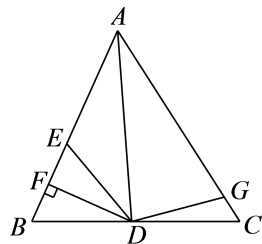
【标注】【知识点】角分线性质定理

【知识点】HL

【思想】数形结合思想

【能力】运算能力

4. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DF \perp AB$ ，垂足为 F ， $DE = DG$ ， $\triangle ADF$ 和 $\triangle ADE$ 的面积分别为20和18，则 $\triangle ADG$ 的面积为（ ）。



A. 20

B. 21

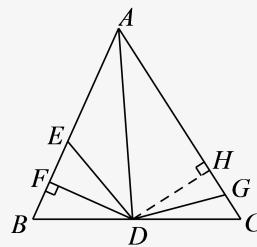
C. 22

D. 24

【答案】C

【解析】作 $DH \perp AC$ 于点 H ，由角平分线的性质可得 $DF = DH$ ，

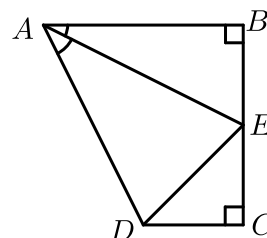
$\therefore DE = DG$,
 $\therefore \triangle DEF \cong \triangle DGH (\text{HL})$,
 $\therefore S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DGH}$,
 $\therefore S_{\triangle ADF} = 20$, $S_{\triangle ADE} = 18$,
 $\therefore S_{\triangle DEF} = 20 - 18 = 2$,
 $\therefore S_{\triangle ADF} = S_{\triangle ADH}$,
 $\therefore S_{\triangle ADG} = S_{\triangle ADH} + S_{\triangle DGH}$
 $= 20 + 2$
 $= 22$.
 故选C .



【标注】【知识点】全等三角形的周长与面积

练习2

5. 如图，点E是BC的中点， $AB \perp BC$ ， $DC \perp BC$ ，AE平分 $\angle BAD$ ，下列结论：
 ① $\angle AED = 90^\circ$ ；② $\angle ADE = \angle CDE$ ；③ $DE = BE$ ；④ $AD = AB + CD$.
 四个结论中成立的是（ ） .



- A. ①②④ B. ①②③ C. ②③④ D. ①③

【答案】 A

【解析】 过E作 $EF \perp AD$ 于F，如图，

$\therefore AB \perp BC$ ，AE平分 $\angle BAD$ ，
 $\therefore \angle AFE = \angle B = 90^\circ$ ， $\angle FAE = \angle BAE$ ，
 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AEB$ 中，

$$\begin{cases} \angle AFE = \angle B \\ \angle FAE = \angle BAE \\ AE = AE \end{cases}$$

 $\therefore \text{Rt}\triangle AEF \cong \text{Rt}\triangle AEB (\text{AAS})$ ，
 $\therefore BE = EF$ ， $AB = AF$ ， $\angle AEF = \angle AEB$ ；

又 $\because$ 点 E 是 BC 的中点,

$$\therefore EC = EF = BE,$$

又 $\because DE > CE$,

$\therefore DE > BE$, 所以③不正确.

在 $\text{Rt}\triangle EFD$ 和 $\text{Rt}\triangle ECD$ 中,

$$\begin{cases} EF = EC \\ DE = DE \end{cases}$$

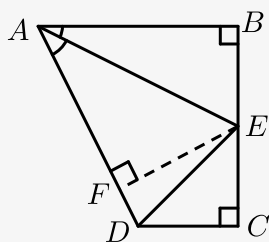
$\therefore \text{Rt}\triangle EFD \cong \text{Rt}\triangle ECD (\text{HL})$,

$\therefore DF = DC$, $\angle FED = \angle CED$, $\angle FDE = \angle CDE$, 所以②正确;

$\therefore \angle AED = \angle AEF + \angle FED = \frac{1}{2} \angle BEC = 90^\circ$, 所以①正确.

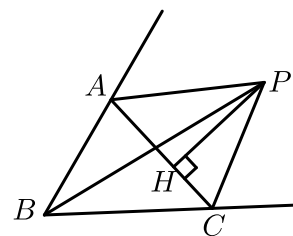
$AD = AF + FD = AB + DC$, 所以④正确;

故选A.



【标注】【知识点】垂直构对称

6. 如图所示, $\triangle ABC$ 的两条外角平分线 AP , CP 相交于点 P , $PH \perp AC$ 于点 H , 且 $\angle ABC = 60^\circ$, 则下面的结论: ① $\angle ABP = 30^\circ$; ② $\angle APC = 60^\circ$; ③ $\triangle ABC \cong \triangle APC$; ④ $PA \parallel BC$; ⑤ $\angle APH = \angle BPC$, 其中正确结论的个数有 ().



A. 2个

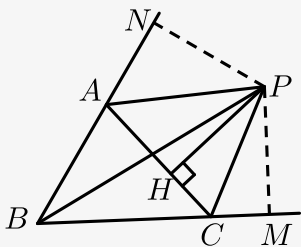
B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】 B

【解析】 如图作 $PM \perp BC$ 于 M , $PN \perp BA$ 于 N ,



$\therefore \angle PAH = \angle PAN, PN \perp AB, PH \perp AC,$

$\therefore PN = PH,$ 同理 $PM = PH,$

$\therefore PN = PM,$

$\therefore PB$ 平分 $\angle ABC,$

$\therefore \angle ABP = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ,$ 故①正确,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle PAH$ 和 $\text{Rt}\triangle PAN$ 中,

$$\begin{cases} PA = PA \\ PH = PN \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle PAH \cong \text{Rt}\triangle PAN,$

同理可证, $\triangle PCM \cong \text{Rt}\triangle PCH,$

$\therefore \angle APH = \angle APN, \angle CPM = \angle CPH,$

$\therefore \angle MPN = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ,$

$\therefore \angle APC = \frac{1}{2} \angle MPN = 60^\circ,$ 故②正确,

不能得出 $\triangle ABC \cong \triangle APC,$ 故③错误,

进而不能得出 $PA \parallel BC,$ 故④错误,

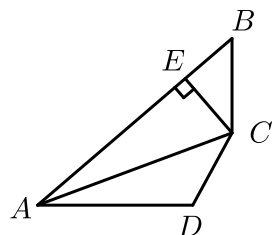
$\therefore \angle BPN = \angle CPA = 60^\circ,$

$\therefore \angle CPB = \angle APN = \angle APH,$ 故⑤正确,

故选B.

【标注】【知识点】垂直构对称

7. 如图所示, AC 平分 $\angle BAD, CE \perp AB,$ 且 $2AE = AB + AD, \angle ADC = 146^\circ,$ 则 $\angle BCE =$ _____ $^\circ.$



【答案】 56

【解析】过点 C 作 CF 垂直 AD 的延长线于点 F ，

由角平分线的性质可得 $CE = CF$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle AEC \cong \text{Rt}\triangle AFC$ (HL)，则 $AE = AF$ 。

由 $2AE = AB + AD$ ，得 $2AE = AE + BE + AD$ ，

$\therefore AE = BE + AD$ ，

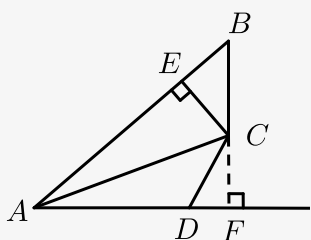
$\therefore AD + DF = BE + AD$ ，

$\therefore BE = DF$ ，

$\therefore$ 可证得 $\text{Rt}\triangle CDF \cong \text{Rt}\triangle CBE$ (HL)，得 $\angle BCE = \angle DCF$ ，又

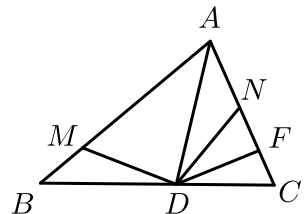
$\angle DCF = \angle ADC - \angle DFC = 146^\circ - 90^\circ = 56^\circ$ 。

$\therefore \angle BCE = 56^\circ$ 。



【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D ， $\angle MDN$ 的两边分别与 AB ， AC 相交于 M ， N 两点， $DM = DN$ ，过 D 作 $DF \perp AC$ 于 F ，证明： $AM + AN = 2AF$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$ ， $DF \perp AC$ ，

$\therefore DE = DF$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DEM$ 和 $\text{Rt}\triangle DFN$ 中，

$$\begin{cases} DM = DN \\ DE = DF \end{cases}$$

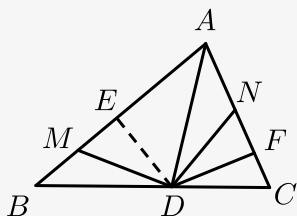
$\therefore \text{Rt}\triangle DEM \cong \text{Rt}\triangle DFN$ (HL)，

$\therefore ME = NF$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 与 $\text{Rt}\triangle AFD$ 中，

$$\begin{cases} AD = AD \\ DE = DF \end{cases}$$

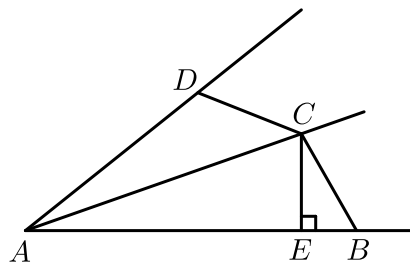
 $\therefore \text{Rt}\triangle AED \cong \text{Rt}\triangle AFD \text{ (HL)} ,$
 $\therefore AE = AF ,$
 $\therefore AM + AN = AE + EM + AN$
 $= AE + NF + AN$
 $= AE + AF$
 $= 2AF .$



【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

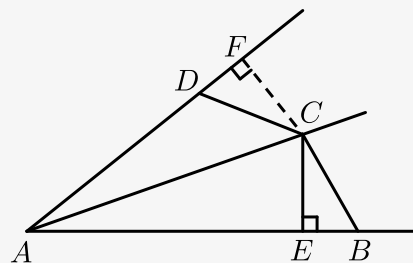
9. 四边形 $ABCD$ 中， AC 平分 $\angle BAD$ ， $CE \perp AB$ 于 E ， $\angle ADC + \angle EBC = 180^\circ$ ，求证：

$$2AE = AB + AD .$$



【答案】证明见解析．

【解析】过 C 作 $CF \perp AD$ 于 F ，



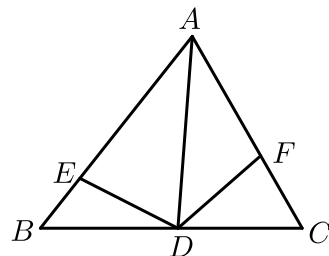
$\therefore AC$ 平分 $\angle BAD$ ，
 $\therefore \angle FAC = \angle EAC$ ，
 $\therefore CE \perp AB$ ， $CF \perp AD$ ，

$\therefore \angle DFC = \angle AEC = \angle CEB = 90^\circ$,
 又 $AC = AC$,
 $\therefore \triangle AEC \cong \triangle AFC$,
 $\therefore AF = AE$, $CF = CE$,
 $\therefore \angle ADC + \angle FDC = 180^\circ$, $\angle ADC + \angle EBC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle FDC = \angle EBC$,
 $\therefore \triangle FDC \cong \triangle EBC$,
 $\therefore DF = EB$,
 $\therefore AB + AD = AE + EB + AD = AE + DF + AD = AF + AE = 2AE$,
 $\therefore 2AE = AB + AD$.

【标注】【知识点】垂直构对称

练习3

10. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, E 、 F 分别是 AB 、 AC 上的点, 连接 DE 、 DF , $\angle EDF + \angle BAC = 180^\circ$. 求证: $DE = DF$.



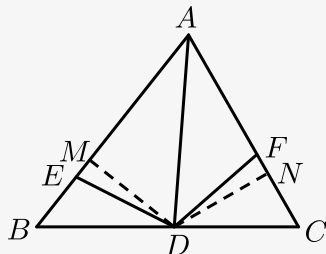
【答案】证明见解析.

【解析】过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M , $DN \perp AC$ 于点 N .

$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore DM = DN$.

$\therefore$



$\angle EDF + \angle BAC = 180^\circ$,

$\therefore \angle AED + \angle AFD = 180^\circ$,

$\therefore \angle AFD + \angle DFN = 180^\circ$,

$$\therefore \angle DEM = \angle DFN .$$

在 $\triangle DEM$ 和 $\triangle DFN$ 中 ,

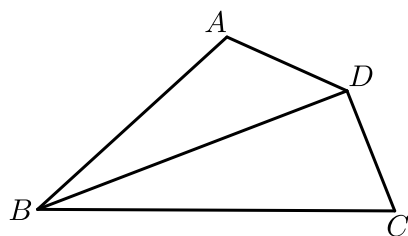
$$\begin{cases} \angle DEM = \angle DFN \\ \angle EMD = \angle FND = 90^\circ , \\ DM = DN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DEM \cong \triangle DFN \text{ (AAS)} .$$

$$\therefore DE = DF .$$

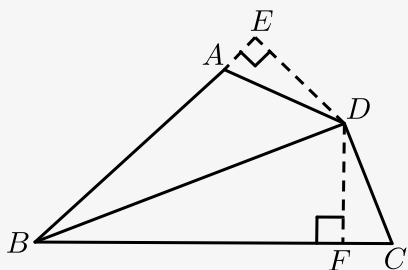
【标注】【知识点】垂直构对称

11. 如图 , 在四边形 $ABCD$ 中 , $BC > AB$, $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $AD = CD$. 求证 : BD 平分 $\angle ABC$



【答案】证明见解析 .

【解析】如图 , 过 D 作 $DE \perp BA$ 延长线于 E , 作 $DF \perp BC$ 于 F .



可证 $\triangle AED \cong \triangle CFD$,

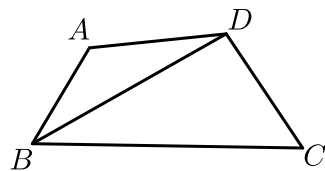
$$\therefore DE = DF ,$$

$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle ABC .$$

【标注】【知识点】截长补短

12. 已知 : 如图 , 在四边形 $ABCD$ 中 , $BC > BA$, $AD = CD$, BD 平分 $\angle ABC$, 求证 :

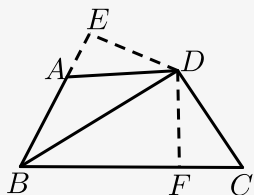
$$\angle A + \angle C = 180^\circ .$$



【答案】证明见解析 .

【解析】方法一：作 $DE \perp BA$ 交 BA 延长线于点 E ， $DF \perp BC$ ，

$$\angle E = \angle DFC = 90^\circ,$$



$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore DE = DF,$$

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 和 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中，

$$\begin{cases} AD = CD \\ DE = DF \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle AED \cong \text{Rt}\triangle CFD (\text{HL})$ ，

$$\therefore \angle DAE = \angle C,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle DAE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle C = 180^\circ.$$

方法二：在 BC 上截取 $BE = BA$ ，连接 DE ，如图，

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle EBD,$$

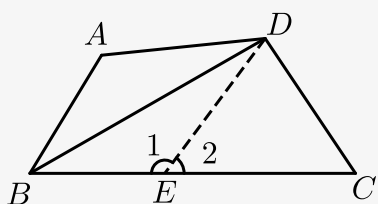
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBD$ 中，

$$\begin{cases} BA = BE \\ \angle ABD = \angle EBD \\ BD = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD (\text{SAS})$ ，

$$\therefore \angle A = \angle 1, DA = DE,$$

又 $\because AD = DC$ ，



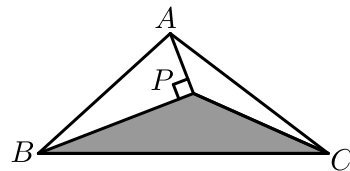
$$\begin{aligned}\therefore DE &= DC, \\ \therefore \angle C &= \angle 2, \\ \therefore \angle 1 + \angle 2 &= 180^\circ, \\ \therefore \angle A + \angle C &= 180^\circ.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

二、垂自己

练习4

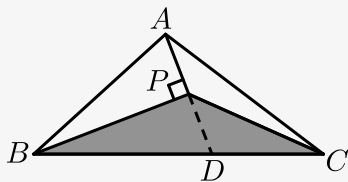
13. 如图所示， $\triangle ABC$ 的面积为 4cm^2 ， AP 垂直 $\angle ABC$ 的平分线 BP 于点 P ，则 $\triangle PBC$ 的面积为 _____ cm^2 。



【答案】2

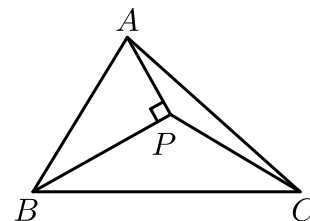
【解析】如图，延长 AP 交 BC 于点 D ，易证 $\triangle ABP \cong \triangle DBP$ ，

$$\begin{aligned}\therefore AP &= DP, \\ \therefore S_{\triangle ABP} &= S_{\triangle DBP}, \\ S_{\triangle APC} &= S_{\triangle DPC}, \\ \therefore \\ S_{\triangle PBC} &= \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 2 \\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$



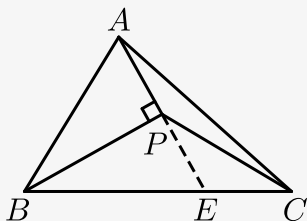
【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AP 垂直 $\angle ABC$ 的平分线 BP 于点 P ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 16cm^2 ， $BP = 5\text{cm}$ ，且 $\triangle ABP$ 的面积是 $\triangle ACP$ 面积的3倍，则 AP 的长是 _____。



【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】 延长 AP 交 BC 于 E ,



$\because AP$ 垂直 $\angle B$ 的平分线 BP 与 P ,
 $\therefore \angle ABP = \angle EBP$, $\angle APB = \angle BPE = 90^\circ$,
 在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle EBP$ 中 ,

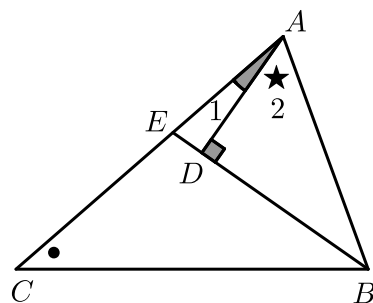
$$\begin{cases} \angle ABP = \angle EBP \\ BP = BP \\ \angle APB = \angle EPB \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle ABP \cong \triangle EBP$ (ASA) ,
 $\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle EBP}$, $AP = EP$,
 $\therefore \triangle APC$ 和 $\triangle CPE$ 等底同高 ,
 $\therefore S_{\triangle APC} = S_{\triangle PCE}$,
 $\therefore S_{\triangle ABP} = 3S_{\triangle APC}$,
 $\therefore S_{\triangle EBP} = 3S_{\triangle PCE}$,
 $\therefore S_{\triangle PBC} = 8\text{cm}^2$,
 $\therefore S_{\triangle EBP} = 6\text{cm}^2$,
 $\therefore S_{\triangle ABP} = 6\text{cm}^2$,
 $\therefore BP = 5\text{cm}$,
 $\therefore AP = \frac{2 \times 6}{5} = \frac{12}{5}\text{cm}$,
 故答案为 : $\frac{12}{5}$.

【标注】 【知识点】 延长构对称

练习5

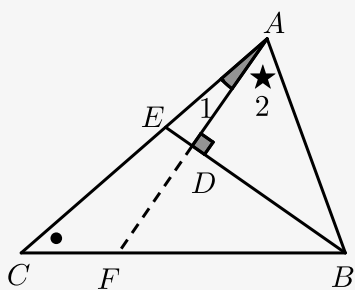
15.

如图：在 $\triangle ABC$ 中， BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线， $AD \perp BE$ ，垂足为 D ，请写出 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle C$ 之间的关系 _____ 。



【答案】 $\angle 2 = \angle 1 + \angle C$

【解析】 如图，延长 AD 交 BC 于 F ，



易证 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle FBD$ ，

所以 $\angle 2 = \angle DFB$ ，

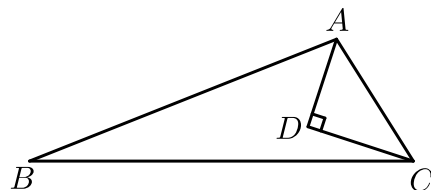
因为 $\angle 2 = \angle DFB$ ，

$\angle DFB = \angle 1 + \angle C$ ，

所以 $\angle 2 = \angle 1 + \angle C$ 。

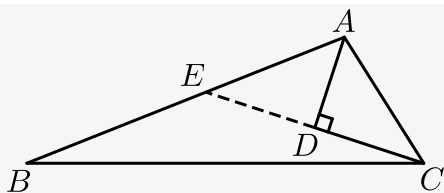
【标注】【知识点】延长构对称

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ， $CD \perp AD$ 于点 D ， $\angle ACD = 2\angle B$ ，若 $CD = 8$ ， $AB = 26$ ，则 AC 的长为 _____ 。



【答案】 10

【解析】 延长 CD 交 AB 于 E 。



$$\therefore \angle AEC = \angle ACE .$$

$$\therefore \angle ACD = 2\angle B .$$

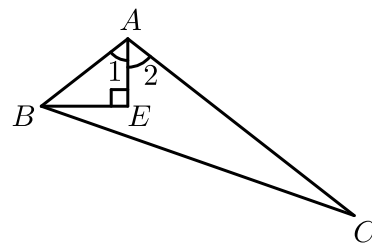
$$\therefore \angle ECB = \angle B .$$

$$\text{即 } BE = CE = 16 .$$

$$\therefore AC = AE = 10 .$$

【标注】【知识点】三角形-内角角分线

17. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 3\angle C$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $BE \perp AE$ 。求证： $AC - AB = 2BE$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】延长 BE 交 AC 于 M 。

$$\therefore AE \perp BE ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AEM = 90^\circ .$$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AEM$ 中，

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle AEM \\ AE = AE \\ \angle 1 = \angle 2 \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AEM ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 , AB = AM , BE = EM ,$$

$$\therefore AC - AB = AC - AM = MC , BM = 2BE .$$

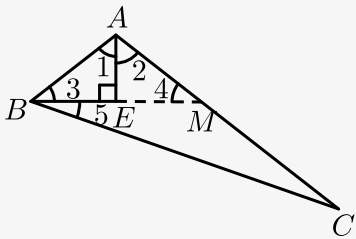
$$\text{又} \because \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 + \angle C , \angle ABC = \angle 3 + \angle 5 = 3\angle C ,$$

$$\therefore \angle 5 + \angle C + \angle 5 = 3\angle C ,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle C ,$$

$$\therefore MB = MC ,$$

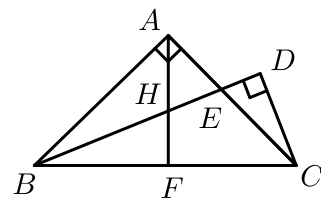
$$\therefore AC - AB = 2BE .$$



【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

练习6

18. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ， $CD \perp BE$ 于点 D ，且 $AF \perp BC$ 于点 F ，交 BE 于点 H 。求证： $CD = \frac{1}{2}BE$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】延长 BA 交 CD 的延长线于 M 。

$$\because \angle MBD = \angle CBD, BD \perp CD, BD = BD.$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BMD.$$

$$\therefore CD = DM = \frac{1}{2}CM.$$

$$\because \angle MCA + \angle M = 90^\circ, \angle DBA + \angle M = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MCA = \angle DBA.$$

$$\text{又} \because AC = AB, \angle MAC = \angle EAB = 90^\circ,$$

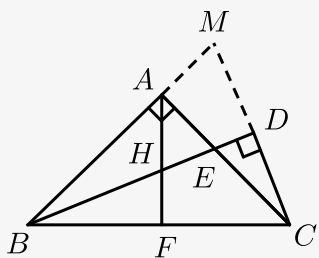
$$\therefore \triangle MCA \cong \triangle EBA,$$

$$\therefore CM = BE.$$

$$\therefore CM = 2CD,$$

$$\therefore BE = 2CD.$$

$$\text{即} CD = \frac{1}{2}BE.$$



【标注】【题型】题型：等腰直角三角形与全等

19. 如图1所示：OP平分 $\angle MON$ ，A为OM上一点， $AC \perp OP$ 于C点，则延长AC与ON交于B点（如图2所示），易证 $AC = BC$ ， $OA = OB$ ，进而可知点C是线段AB的中点。

请根据上面的学习材料，解答下题：

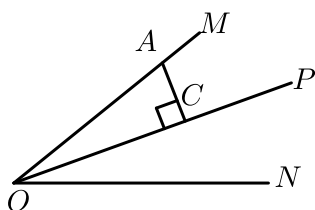


图1

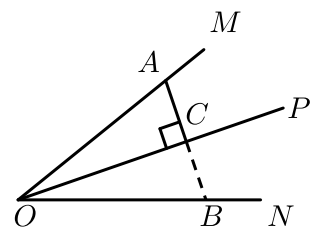
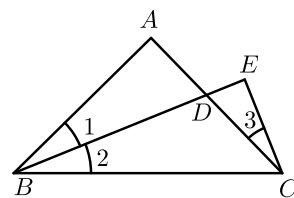


图2

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，BE平分 $\angle ABC$ ， $CE \perp BE$ 。

求证： $CE = \frac{1}{2}BD$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】延长CE、BA相交于F，

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle BEC$ 中，

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ BE = BE \\ \angle BEF = \angle BEC \end{cases},$$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BEC$ (ASA)。

$$\therefore EF = EC = \frac{1}{2}CF.$$

$\therefore BE \perp CE$,

$$\therefore \angle 1 = 90^\circ - \angle F.$$

同理 $\angle 3 = 90^\circ - \angle F$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 3.$$

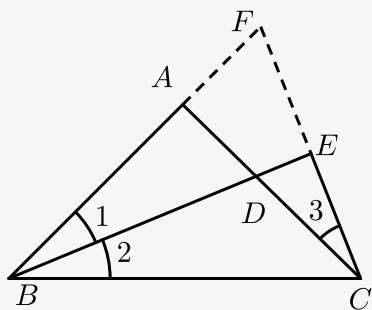
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACF$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF$ (ASA) .

$$\therefore BD = CF.$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BD.$$

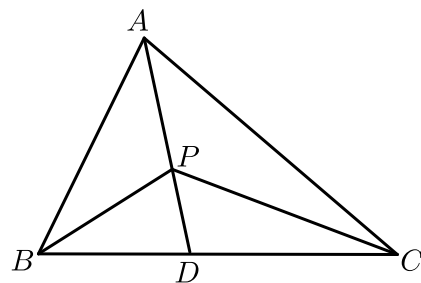


【标注】【知识点】延长构造对称

三、截取构造全等

练习7

20. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线, P 是 AD 上异于 A 的任意一点, 则下列关于 $PB + PC$ 和 $AC - AB$ 正确的是 ().



A. $PB + PC < AC - AB$

B. $PB + PC = AC - AB$

C. $PB + PC > AC - AB$

D. 不确定

【答案】C

【解析】如图，在 AC 上截取 $AE = AB$ ，连接 PE 。

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$\therefore \angle BAP = \angle EAP$ ，

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle AEP$ 中，
$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle BAP = \angle EAP \\ AP = AP \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle AEP$ (SAS)，

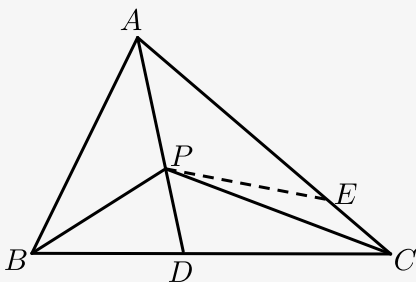
$\therefore PB = PE$ ，

在 $\triangle CPE$ 中， $PE + PC > CE$ ，

而 $CE = AC - AE = AC - AB$ ，

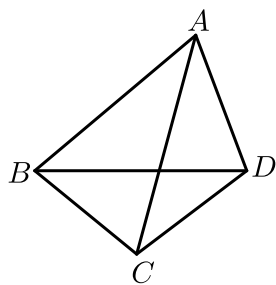
$\therefore PE + PC > AC - AB$ ，

$\therefore PB + PC > AC - AB$ 。



【标注】【知识点】截取构造对称

21. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$ ， $AB > AD$ ，下列结论正确的是（ ）。



A. $AB - AD > CB - CD$

B. $AB - AD = CB - CD$

C. $AB - AD < CB - CD$

D. $AB - AD$ 与 $CB - CD$ 的大小关系不确定

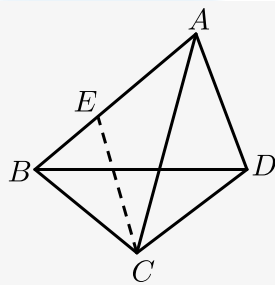
【答案】A

【解析】在 AB 上截取 $AE = AD$ ，连接 CE ，

由 $\triangle AEC \cong \triangle ADC$ (SAS)，得 $EC = CD$ ，

在 $\triangle BEC$ 中， $BE > BC - EC$ ，即 $AB - AD > CB - CD$ 。

故选A。

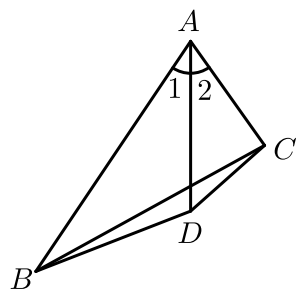


【标注】【知识点】角分线性质定理

【知识点】全等三角形的对应边与角

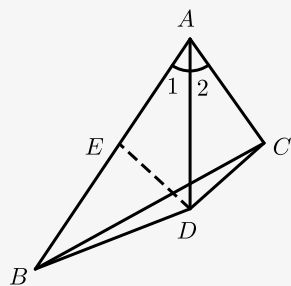
练习8

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle 1 = \angle 2$ ， $AB = 2AC$ ， $AD = BD$ 。求证： $DC \perp AC$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】方法一：如图，取 AB 的中点 E ，连接 DE 。



$$\because AE = BE, AD = BD,$$

$$\therefore DE \perp AB.$$

$$\because AE = AC, \angle 1 = \angle 2, AD \text{ 公共},$$

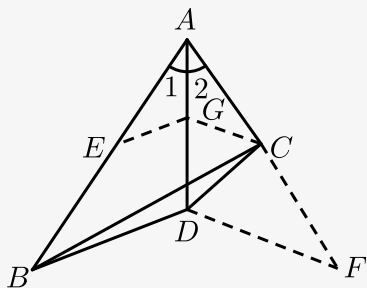
$$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD (\text{SAS}).$$

$$\therefore \angle AED = \angle ACD = 90^\circ.$$

$$\therefore DC \perp AC.$$

方法二：如图，延长 AC 到 F ，

使 $AC = CF$ ， $AF = 2AC$ 。



$\because AB = 2AC = AF, \angle 1 = \angle 2, AD$ 公共 ,

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle ADF(\text{SAS}), DB = DF.$

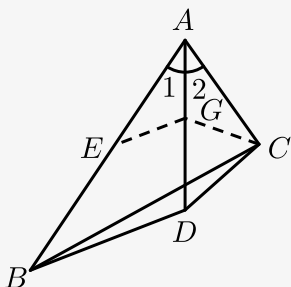
$\therefore BD = AD,$

$\therefore DF = AD,$

$\therefore DC$ 是等腰三角形 ADF 底边上的中线 ,

$\therefore DC \perp AC.$

方法三 : 如图 , 取 AB 、 AD 的中点 E 、 G ,
连接 EG 、 GC ,



$\therefore EG \parallel BD$, 故 $\angle AEG = \angle ABD.$

$\because AD = BD,$

$\therefore \angle ABD = \angle 1,$

$\therefore \angle AEG = \angle 1,$

$\therefore AG = EG.$

$\because AE = \frac{1}{2}AB, AB = 2AC,$

$\therefore AE = AC.$ 而 $\angle 1 = \angle 2, AG$ 公共 ,

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle ACG(\text{SAS}).$

$\therefore EG = GC = AG, GC = AG = GD,$

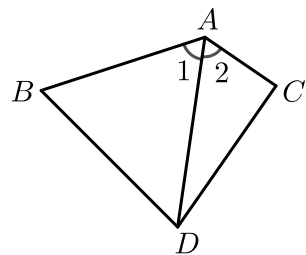
$\therefore \triangle ADC$ 是直角三角形 .

$\therefore DC \perp AC.$

【标注】【知识点】截取构造对称

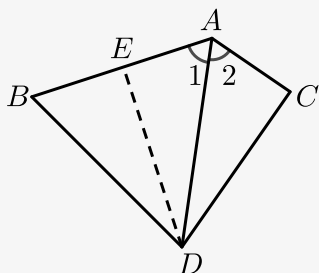
23. 如图所示 , $AB = 2AC, \angle 1 = \angle 2, DA = DB.$

求证： $DC \perp AC$.



【答案】证明见解析 .

【解析】方法一：作 $DE \perp AB$ 于点 E ,



则 $\angle AED = 90^\circ$

$\because DA = BD$, $\therefore \triangle AED \cong \triangle BED(\text{HL})$. $\therefore AE = BE$.

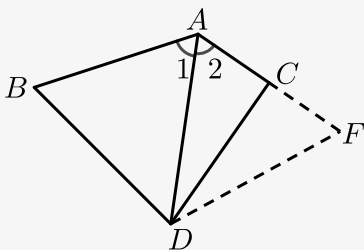
$\therefore AB = 2AE$. $\because AB = 2AC$, $\therefore AE = AC$.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 中 , $\begin{cases} AE = AC \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AD = AD \end{cases}$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD(\text{SAS})$

$\therefore \angle ACD = \angle AED = 90^\circ$, $\therefore DC \perp AC$

方法二：如图所示，延长 AC 到 F ，使 $AF = AB$ ，连接 DF .



在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AFD$ 中 , $\begin{cases} AB = AF \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AD = AD \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AFD(\text{SAS})$, $\therefore DF = DB = AD$

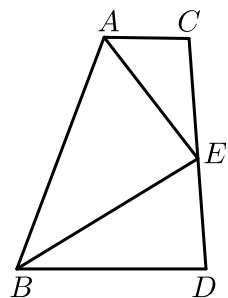
$\because AB = 2AC$, $\therefore AF = 2AC$, 即 C 为 AF 的中点 ,

易证 $\triangle ACD \cong \triangle FCD$

$\therefore DC \perp AC$.

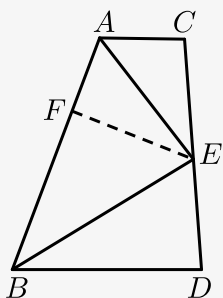
练习9

24. 如图，已知 $AC \parallel BD$ ， AE 、 BE 分别平分 $\angle CAB$ 和 $\angle DBA$ ，点 E 在线段 CD 上．求证：
 $AB = AC + BD$ ．



【答案】证明见解析．

【解析】在 AB 上取一点 F ，使 $AF = AC$ ，连接 EF ，



$\because EA$ 、 EB 分别平分 $\angle CAB$ 和 $\angle DBA$ ，

$\therefore \angle CAE = \angle FAE$ ， $\angle EBF = \angle EBD$ ．

$\because AC \parallel BD$ ，

$\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$ ．

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle AFE$ 中，

$$\begin{cases} AC = AF \\ \angle CAE = \angle FAE \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle AFE$ (SAS)，

$\therefore \angle C = \angle AFE$ ．

$\because \angle AFE + \angle EFB = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle EFB = \angle D$ ，

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle BED$ 中，

$$\begin{cases} \angle EFB = \angle D \\ \angle EBF = \angle EBD \\ BE = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BED \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BF = BD,$$

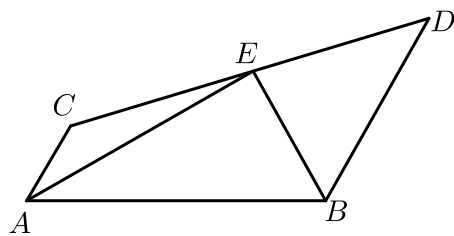
$$\therefore AB = AF + BF,$$

$$\therefore AB = AC + BD.$$

【标注】【知识点】截长补短

25. 如图所示, $AC \parallel BD$, AE 、 BE 分别平分 $\angle CAB$ 和 $\angle DBA$, 点 E 在线段 CD 上, 求证:

$$AB = AC + BD.$$



【答案】证明见解析.

【解析】如图所示, 在 AB 上截取 $AF = AC$, 连接 EF ,

$$\therefore EA \text{ 平分 } \angle CAB,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} AF = AC \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AE = AE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle AFE \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore \angle C = \angle AFE.$$

$$\therefore AC \parallel BD,$$

$$\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle AFE + \angle EFB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle EFB.$$

$$\therefore EB \text{ 平分 } \angle DBA,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4.$$

在 $\triangle EFB$ 和 $\triangle EDB$ 中,

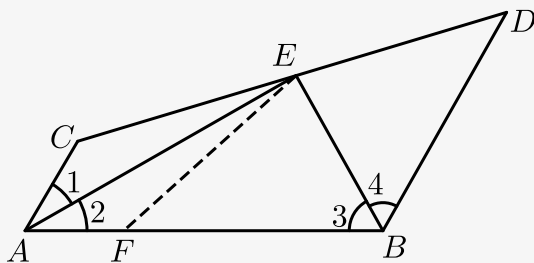
$$\begin{cases} \angle D = \angle EFB \\ \angle 3 = \angle 4 \\ EB = EB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EFB \cong \triangle EDB \text{ (AAS)}.$$

$$\therefore BF = BD .$$

$$\therefore AB = AF + BF ,$$

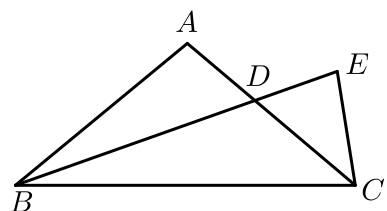
$$\therefore AB = AC + BD .$$



【标注】【知识点】截长补短

练习10

26. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle ABC = 40^\circ$ ， BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，延长 BD 至 E ，使 $DE = AD$ ，则 $\angle ECA$ 的度数为（ ）。



A. 30°

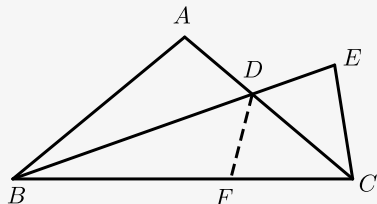
B. 35°

C. 40°

D. 45°

【答案】C

【解析】在 BC 上截取 $BF = AB$ ，连 DF ，



则有 $\triangle ABD \cong \triangle FBD$ ，

$$\therefore DF = DA = DE ,$$

$$\text{又} \because \angle ACB = \angle ABC = 40^\circ , \angle DFC = 180^\circ - \angle A = 80^\circ ,$$

$$\therefore \angle FDC = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ADB = 180^\circ - \angle ABD - \angle A = 180^\circ - 20^\circ - 100^\circ = 60^\circ ,$$

$$\therefore \triangle DCE \cong \triangle DCF,$$

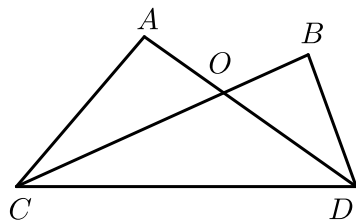
$$\text{故 } \angle ECA = \angle DCB = 40^\circ.$$

故选C.

【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

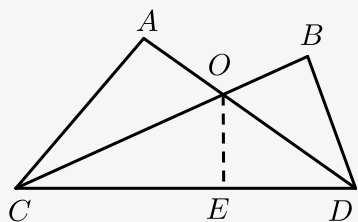
27. 如图, $\angle ACD$ 、 $\angle BDC$ 的平分线相交于点O, 若 $CD = AC + BD$, $AO = 3$, 则 $OB =$

_____.



【答案】3

【解析】如图, 在 CD 上截取 $CE = CA$, 连接 OE .



$$\because CD = AC + BD, CD = CE + ED,$$

$$\therefore ED = BD$$

$$\because OC、OD \text{ 平分 } \angle ACD、\angle BDC,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle ECO, \angle BDO = \angle EDO,$$

在 $\triangle ACO$ 和 $\triangle ECO$ 中,

$$\begin{cases} AC = CE \\ \angle ACO = \angle ECO, \\ CO = CO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACO \cong \triangle ECO(\text{SAS}),$$

$$\therefore OA = OE,$$

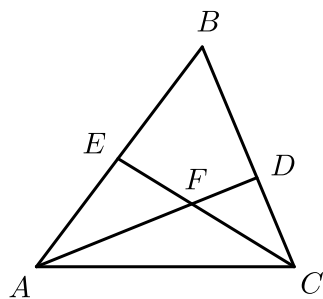
$$\text{同理有: } \triangle BDO \cong \triangle EDO(\text{SAS}),$$

$$\therefore OB = OE$$

$$\therefore OB = OA = 3.$$

【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

28. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle BAC$ 与 $\angle BCA$ 的平分线 AD 、 CE 分别交 BC 和 AB 于点 D 、 E ， AD 与 CE 相交于点 F ，求证： $FE = FD$ 。

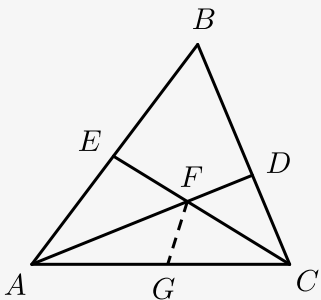


【答案】证明见解析。

【解析】 $\because \angle B = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$\because AD$ 、 CE 分别平分 $\angle BAC$ 与 $\angle BCA$,



$$\begin{aligned}\therefore \angle FAC + \angle FCA &= \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) \\ &= \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ,\end{aligned}$$

$$\therefore \angle AFE = 60^\circ, \angle AFC = 120^\circ,$$

如图，在 AC 上截取 $AG = AE$,

则在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中，

$$\begin{cases} AE = AG \\ \angle EAF = \angle CAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle AFG = \angle AFE = 60^\circ, FE = FG,$$

$$\therefore \angle CFG = \angle CFD = 60^\circ,$$

在 $\triangle CDF$ 和 $\triangle CGF$ 中，

$$\begin{cases} \angle CFG = \angle CFD \\ CF = CF \\ \angle ACE = \angle BCE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CDF \cong \triangle CGF \text{ (ASA)},$$

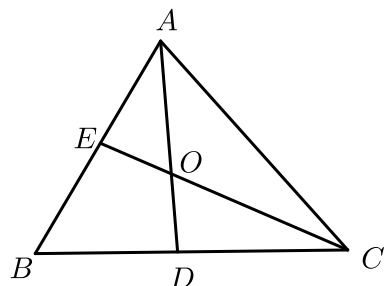
$$\therefore FD = FG,$$

$$\therefore FE = FD .$$

【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

29. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， AD 、 CE 分别平分 $\angle BAC$ 、 $\angle ACB$ 。求证：

$$AC = AE + CD .$$



【答案】证明见解析。

【解析】在 AC 上截取 $AF = AE$ ，

则可得 $\triangle AEO \cong \triangle AFO$ (SAS)

$$\angle AOF = \angle AOE = 60^\circ$$

$$\text{由 } \angle B = 60^\circ$$

$$\text{则 } \angle AOC = 120^\circ$$

$\therefore$

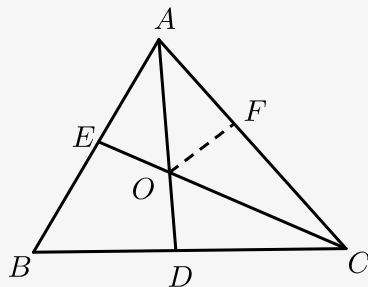
$$\angle FOC = \angle DOC - 60^\circ$$

$$\therefore \triangle FOC \cong$$

$$\triangle DOC(\text{ASA})$$

$$\text{则 } CD = CF ,$$

$$\therefore AC = AE + CD .$$



【标注】【知识点】角分线有关的辅助线